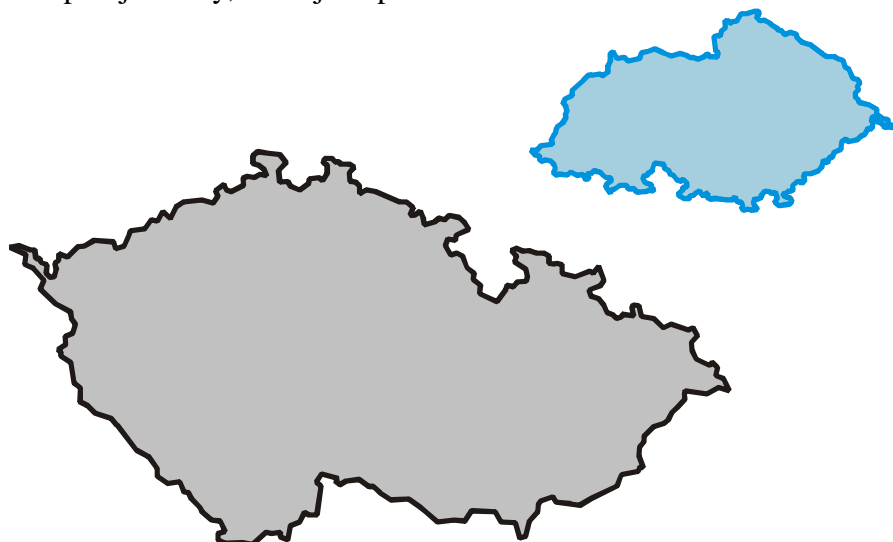


3.2.3 Podobnost trojúhelníků I

Předpoklady: 3201

Shodné útvary – je možné je přemístěním ztotožnit, lidově řečeno jsou „stejně“.

Co splňují útvary, které jsou podobné?



Mají stejný tvar, ale různou velikost.

Kdybychom je chtěli ztotožnit, museli bychom je kromě přemístění i zvětšit (nebo zmenšit).

Kdy jsou podobné dvě úsečky?

Vždy. Všechny úsečky mají stejný tvar, liší se pouze velikostí \Rightarrow vždy můžeme psát

$|CD| = k|AB|$ (k = koeficient podobnosti).

Př. 1: Urči koeficient podobnosti mezi úsečkami $|AB| = 6$ cm, $|CD| = 9$ cm.

Dosadíme do vztahu: $|CD| = k|AB| \Rightarrow k = \frac{|CD|}{|AB|} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$.

Úsečka $|CD| = 9$ cm si je s úsečkou $|AB| = 6$ cm podobná s koeficientem $\frac{3}{2}$.

Kdy jsou si podobné dva trojúhelníky?

Jeden je zvětšení (nebo zmenšení) druhého \Rightarrow všechny strany jednoho trojúhelníku jsou k krát větší (nebo menší) než odpovídající strany druhého.

Trojúhelník $A'B'C'$ je podobný trojúhelníku ABC , právě když existuje kladné číslo k takové, že pro jejich strany platí:

$$|A'B'| = k|AB|, |A'C'| = k|AC|, |B'C'| = k|BC|$$

$$\text{neboli } c' = k \cdot c, a' = k \cdot a, b' = k \cdot b.$$

Názvosloví:

$A'B'C' \sim ABC$ (na pořadí vrcholů záleží) – trojúhelník $A'B'C'$ je podobný trojúhelníku ABC ,

k = koeficient podobnosti trojúhelníků $A'B'C'$ a ABC ,

- $k > 1$ - zvětšení,
- $k < 1$ - zmenšení,
- $k = 1$ - trojúhelníky jsou shodné.

Př. 2: Trojúhelník $A'B'C' \sim ABC$ s koeficientem podobnosti k . Urči koeficient podobnosti trojúhelníku ABC s trojúhelníkem $A'B'C'$.

Platí: $|A'B'| = k|AB| \Rightarrow |AB| = \frac{1}{k}|A'B'|$

Trojúhelník ABC je s trojúhelníkem $A'B'C'$ podobný s koeficientem $\frac{1}{k}$.

Dodatky:

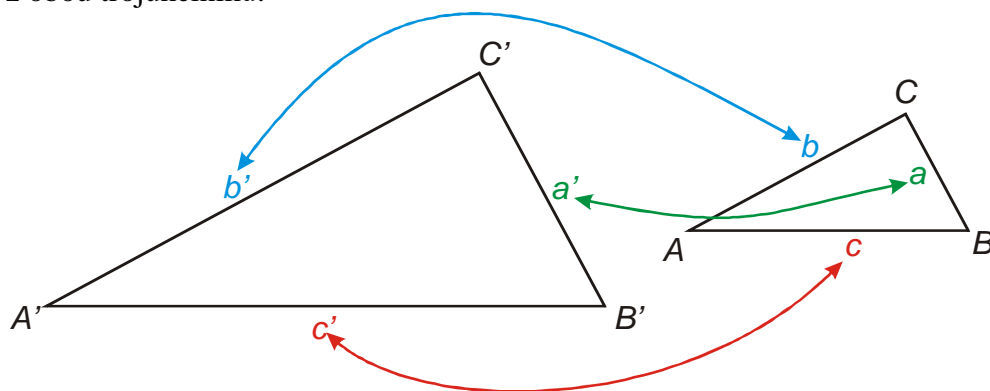
- Podobnost je vzájemný vztah, je-li trojúhelník $A'B'C'$ podobný trojúhelníku ABC ($A'B'C' \sim ABC$) je i trojúhelník ABC podobný trojúhelníku $A'B'C'$ ($ABC \sim A'B'C'$)
 \Rightarrow pokud chceme zapsat samotný fakt podobnosti trojúhelníků na pořadí nezáleží (a v učebnici nebudeme žádné pořadí dodržovat).
- Pokud pracujeme s koeficientem podobnosti: "Trojúhelník $A'B'C'$ je podobný trojúhelníku ABC s koeficientem $k = 3$..." na pořadí záleží, protože trojúhelník ABC je s trojúhelníkem $A'B'C'$ podobný s koeficientem $\frac{1}{k} = \frac{1}{3}$. Proto v učebnici budeme dodržovat dohodu, že délky stran trojúhelníka, který je uveden jako první, získáme tak, že délky odpovídajících stran trojúhelníka, který je uveden jako druhý, vynásobíme uvedeným koeficientem k . Tato dohoda je dodržována i v nám známé literatuře.

Podobnost trojúhelníků můžeme vnímat i jako shodu ve tvaru. Čím je určen tvar trojúhelníka?

- vnitřními úhly
- vzájemným poměrem stran

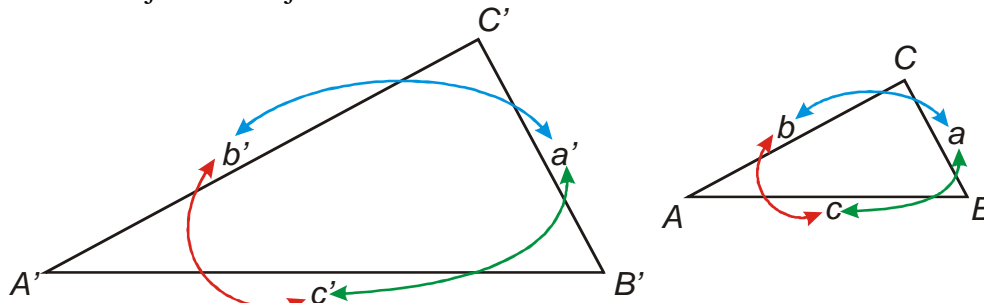
Vydeme z rovností: $c' = k \cdot c$, $a' = k \cdot a$, $b' = k \cdot b \Rightarrow \frac{c'}{c} = \frac{b'}{b} = \frac{a'}{a} = k \Rightarrow$ získáme tři rovnice:

$\frac{c'}{c} = \frac{b'}{b}$, $\frac{b'}{b} = \frac{a'}{a}$, $\frac{c'}{c} = \frac{a'}{a}$ = v každém poměru, který vyjadřuje podobnost, vystupují strany z obou trojúhelníků:



Předchozí rovnosti můžeme upravit: $\frac{c'}{c} = \frac{b'}{b} \Rightarrow \frac{c'}{b'} = \frac{c}{b}$. Získáme tak jiné rovnosti: $\frac{c'}{b'} = \frac{c}{b}$,

$\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a}$, $\frac{c'}{a'} = \frac{c}{a} \Rightarrow$ z poměrů mezi stranami různých trojúhelníků jsme získali poměry mezi stranami v jednom trojúhelníku



\Rightarrow u jednoho z trojúhelníků nemusíme ani znát konkrétní délky stran, stačí jejich poměry a můžeme rozhodnout o podobnosti

nejčastěji zapisujeme v takto: $a' : b' : c' = a : b : c$

Věta o určení podobnosti trojúhelníků pomocí poměrů odpovídajících si stran je obdobou věty *sss* o shodnosti trojúhelníků.

Př. 3: Najdi odpovídající věty o podobnosti k větám o shodnosti *sus*, *usu*.

Věta o shodnosti *sus* \Rightarrow věta o podobnosti *sus*: dva trojúhelníky se musí shodovat v poměrech dvou stran a v úhlu, který strany svírají (věta *su* nestačí, z první dvojice stran zjistíme koeficient podobnosti a teprve jeho dodržení druhou dvojicí stran nám říká něco o podobnosti).

Věta o shodnosti *usu* \Rightarrow věta o podobnosti *uu*: dva trojúhelníky se musí shodovat ve dvou úhlech (třetí úhel je zbytek do 180° a tím je jasná podobnost, protože dva trojúhelníky, které se shodují ve třech úhlech mají stejný tvar a tím pádem jsou si podobné).

Pedagogická poznámka: Zbytek hodiny tvoří příklady na ověřování a výpočtu z podobnosti.

Zejména u ověřování podobnosti je rychlost postupu studentů velmi rozdílná. U pomalejších studentů je důležité, aby měli dost času si příklad spočítat samostatně a tak si problém rozmysleli.

Př. 4: Které z následujících trojúhelníků jsou podobné s trojúhelníkem *ABC*, kde $a = 12$, $b = 15$ a $c = 18$

a) trojúhelník *KLM*: $k = 12$, $l = 10$, $m = 8$

b) trojúhelník *XYZ* o stranách 28;24;36

c) trojúhelník *EFG*: $|EF| = 6$, $|EG| = 4$, $|FG| = 5$

V jednotlivých bodech si seřadíme strany podle velikosti a spočteme si poměry:

a) trojúhelník *KLM*: $k = 12$, $l = 10$, $m = 8$

strany podle velikosti: 8;10;12

$\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$, $\frac{12}{18} = \frac{2}{3} \Rightarrow$ trojúhelníky *ABC* a *MLK* jsou si podobné (pořadí vrcholů je

důležité, abychom věděli, které vrcholy si navzájem odpovídají)

b) trojúhelník XYZ o stranách 28;24;36

strany podle velikosti: 24;28;36

$\frac{24}{12} = 2, \frac{28}{15} = 1,8\bar{6} \Rightarrow$ nemá cenu počítat dál \Rightarrow trojúhelníky ABC a XYZ si nejsou podobné

c) trojúhelník EFG : $|EF| = 6, |EG| = 4, |FG| = 5$

strany podle velikosti: 4;5;6

$\frac{4}{12} = \frac{1}{3}, \frac{5}{15} = \frac{1}{3}, \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ trojúhelníky jsou si podobné

$|EF| = g \sim c, |EG| = f \sim a, |FG| = e \sim b \Rightarrow$ trojúhelníky ABC a FEG jsou si podobné (pořadí vrcholů je důležité, abychom věděli, které vrcholy si navzájem odpovídají)

Př. 5: Pro trojúhelníky platí $ABC \sim KLM$. Urči zbývající strany, pokud víme, že platí:
 $a = 5, b = 4, c = 6, l = 6$.

Nejdříve určíme koeficient podobnosti (označíme si ho q , aby se nám nepletl se stranou k):

$$l = q \cdot b \Rightarrow q = \frac{l}{b} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Teď můžeme dopočítat zbývající strany:

$$k = q \cdot a = \frac{3}{2} \cdot 5 = 7,5$$

$$m = q \cdot c = \frac{3}{2} \cdot 6 = 9$$

Strany trojúhelníka KLM mají délky $k = 7,5, l = 6, m = 9$.

Př. 6: Dva z vnitřních úhlů trojúhelníka ABC mají velikosti 47° a 56° . Dva z vnitřních úhlů trojúhelníka KLM mají velikosti 77° a 56° . Jsou si trojúhelníky podobné?

Dopočítáme třetí úhel u jednoho z trojúhelníků:

trojúhelník ABC : $180^\circ - (47^\circ + 56^\circ) = 77^\circ \Rightarrow$ trojúhelníky ABC a KLM se shodují ve dvou úhlech a jsou si podobné.

Př. 7: Pro poměr stran v trojúhelníku ABC platí $a : b : c = 6 : 5 : 4$. Které z uvedených trojúhelníků jsou s ním podobné?

a) 30;25;15

b) 8;10;12

c) 18;20;24

a) 30;25;15

strany podle velikosti: 30;25;20

kontrolujeme poměry odpovídajících si stran:

$$\frac{a}{b} = \frac{6}{5} = \frac{30}{25} \Rightarrow \text{platí} \quad \frac{a}{c} = \frac{6}{4} \neq \frac{30}{15} = \frac{2}{1} \Rightarrow \text{neplatí} \Rightarrow \text{trojúhelník není podobný}$$

s trojúhelníkem ABC

b) 8;10;12

strany podle velikosti: 12;10;8

kontrolujeme poměry odpovídajících si stran:

$$\frac{a}{b} = \frac{6}{5} = \frac{12}{10} \Rightarrow \text{platí} \quad \frac{a}{c} = \frac{6}{4} = \frac{12}{8} \Rightarrow \text{platí} \quad \frac{b}{c} = \frac{5}{4} = \frac{10}{8} \Rightarrow \text{platí (bylo zřejmé)}$$

dopředu) \Rightarrow trojúhelník je podobný s trojúhelníkem ABC

c) 18;20;24

strany podle velikosti: 24;20;18

kontrolujeme poměry odpovídajících si stran:

$$\frac{a}{b} = \frac{6}{5} = \frac{24}{20} \Rightarrow \text{platí} \quad \frac{a}{c} = \frac{6}{4} \neq \frac{24}{18} = \frac{4}{3} \Rightarrow \text{neplatí} \Rightarrow \text{trojúhelník není podobný}$$

s trojúhelníkem ABC

Př. 8: Pro trojúhelníky platí $ABC \sim LKM$ s koeficientem podobnosti $q = 3$. Urči zbývající strany obou trojúhelníků, pokud víme, že platí: $a = 9$, $k = 4$, $m = 3$.

Známe koeficient podobnosti \Rightarrow můžeme rovnou dopočítávat jednotlivé strany, ale musíme dávat pozor, jak si strany odpovídají:

$$a = q \cdot l \Rightarrow l = \frac{a}{q} = \frac{9}{3} = 3$$

$$b = q \cdot k = 3 \cdot 4 = 12$$

$$c = q \cdot m = 3 \cdot 3 = 9$$

Trojúhelník ABC má strany o velikosti $a = 9$, $b = 12$, $c = 9$, trojúhelník KLM má strany o velikosti $k = 4$, $l = 3$, $m = 3$.

Př. 9: Petáková:
strana 86/cvičení 21

Shrnutí: Podobné útvary mají stejný tvar, ale různou velikost.